

المعادلة الديكارتية للجبر في

مترسبة:

ليكن A_1, A_2 جبرين فوق الحلقة R عندئذ

(1) المجموعة $B_1 = \{ (a, 0) \mid a \in A_1 \}$ تشكل جبراً جزئياً

في $A_1 \times A_2$

(2) المجموعة $B_2 = \{ (0, b) \mid b \in A_2 \}$ تشكل جبراً جزئياً في $A_1 \times A_2$

البرهان:

$$0 \in A_1 \Rightarrow (0, 0) \in B_1 \neq \emptyset$$

$$\bullet \forall (a, 0), (b, 0) \in B_1 \quad a, b \in A_1$$

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0) \in B_1$$

$$\bullet \forall \alpha \in R$$

$$\alpha (a, 0) = (\alpha a, 0) \in B_1$$

B_1 تشكل جبراً جزئياً

$$\forall (a, 0), (b, 0) \in B_1$$

$$[(a, 0), (b, 0)] = ([a, b], [0, 0]) \in B_1$$

B_1 جبر جزئياً في $A_1 \times A_2$

نفس الطريقة

مترسبة:

ليكن A_1, A_2 جبرين فوق الحلقة R عندئذ

(1) المجموعة $B_1 = \{ (a, 0) \mid a \in A_1 \}$ تشكل جبراً جزئياً في $A_1 \times A_2$

(2) المجموعة $B_2 = \{ (0, b) \mid b \in A_2 \}$ تشكل جبراً جزئياً في $A_1 \times A_2$

البرهان :

دعونا نأخذ المجموعة B تتكون من زوجي $A_1 \times A_2$ في

ليكن d تطبيقاً من $A_1 \times A_2$ معرفاً بـ

$$d(B_1) \subseteq B_1 \quad ?? \quad \forall a \in A_1 \times A_2$$

$$\forall x \in B_1 \quad x = (c, 0) \quad c \in A_1$$

$$d(x) = [a, x] = [(a_1, a_2), (c, 0)] = ([a_1, c], [a_2, 0])$$

$$([a_1, c], 0) \in B_1$$

وهذا يعني B_1 مغلق تحت d
بمعنى أن $d(B_1) \subseteq B_1$

البرهان :

ليكن A_1, A_2 فضاءين متجهين، F حقل

$$A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$$

حيث B_1 و B_2 فضاءان متجهيان، المعرفة في الترسيد السابق

البرهان :

نأخذ $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ ، $(a_1, a_2) \in B_1 \oplus B_2$ (بمعنى أن يكون

ليكن $(x, y) \in A_1 \times A_2$ عندها

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in B_1 \oplus B_2$$

وهذا يعني

$$A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$$

ليكن $(a_1, a_2) \in B_1 \cap B_2$

$$\left. \begin{array}{l} (a_1, a_2) \in B_1 \Rightarrow a_2 = 0 \\ (a_1, a_2) \in B_2 \Rightarrow a_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a_1, a_2) = (0, 0)$$

$$A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$$

وبالتالي

لكن $A_1 \times A_2$ هيكل فضاء متجهي، كقول f عكسي

$$B_1 \cong B_1 \oplus \{0\}$$

$$B_2 \cong \{0\} \oplus B_2$$

البرهان:

$$f: B_1 \rightarrow B_1 \oplus \{0\}$$

نعرف علاقة

$$\forall a \in B_1 \quad f(a) = (a, 0)$$

ما ظهر f تعيين متباين وفائق

$$\forall a, b \in B_1 \quad f(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha a) = (\alpha a, 0) = \alpha(a, 0) = \alpha f(a)$$

$$f([a, b]) = ([a, b], 0) = ([a, b], [0, 0])$$

$$= ([0, a], [b, 0]) = f$$

$$f_2 = [f(a), f(b)] = \oplus_2 [(a, 0), (b, 0)] = ([a, b], [0, 0])$$

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

بالتالي
 $f \cong f'$

$$B_1 \cong B_1 \oplus \{0\}$$

قضية:

لكن A مركب فوق الحقل K و I, J مثاليين في A عندئذ

$$I \times J = I \oplus J$$

البرهان

$$f: I \times J \rightarrow I \oplus J$$

بفرض الملقب

$$\forall (a, b) \in I \times J : f(a, b) = a + b$$

واضح ان f تركيبي

$$\forall x, y \in I \times J$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$x_1, y_1 \in I$$

$$y = (y_1, y_2)$$

$$x_2, y_2 \in J$$

$$f(x+y) = f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1+y_1, x_2+y_2)$$

$$= (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \in I \oplus J$$

$$f(x) + f(y) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = (x_1+x_2) + (y_1+y_2)$$

$$= (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \in I \oplus J$$

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall \alpha \in F \quad f(\alpha x) = f(\alpha(x_1, x_2)) = f(\alpha x_1, \alpha x_2)$$

$$= \alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(x_1 + x_2)$$

$$= \alpha f(x)$$

$$f([x, y]) = f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = f([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \\ = [x_1, y_1] + [x_2, y_2]$$

$$f_2 = [f(x), f(y)] = [f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)] \\ = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2]$$

$$\Rightarrow f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$

$\Leftarrow f$ متشاكل

استنتجت المطلوب